Université d'Orléans
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1994

Option : SPÉCIALES T

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. - COEFFICIENT : 4

Avertissement aux candidats

Le problème est composé de quatre parties qui sont dans une large mesure indépendantes. Les candidats devront indiquer très clairement le numéro de chaque partie traitée et respecter l'ordre des questions à l'intérieur de celle-ci.
Les correcteurs accorderont une grande importance à la clarté et à la précision des réponses, au soin apporté à la rédaction ainsi qu'à sa concision. Toute affirmation fondée sur un théorème doit être accompagnée d'un rappel clair des hypothèses utiles. Les affirmations non justifiées ne seront pas prises en compte.

I. Etude d'un endomorphisme. Calcul de $1^2 + ... + m^2$.

Pour tout entier $n \geq 1$ soit $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur où égal à n, à coefficients dans le corps $\mathbf{R}$ des réels.

1. Soit $P_0(X), ..., P_n(X)$ des polynômes de E_n tels que, pour $i = 0, ..., n$ le degré de $P_i(X)$ soit égal à i. Démontrer que $(P_0(X), ..., P_n(X))$ est une base de E_n.

2. Soit φ_n l'endomorphisme de E_n défini par $\varphi_n(P(X)) = P(X+1) - P(X)$.

   a) Déterminer la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ puis le noyau et l'image de φ_n.

   b) Prouver que $\varphi_n^n \neq 0$ et $\varphi_n^{n+1} = 0$.

   c) L'endomorphisme $\varphi_n + id_n$ (où id_n désigne l'application identique de E_n) est-il inversible? Est-il diagonalisable?

3. On veut déterminer les polynômes $J_1(X), ..., J_n(X)$ vérifiant les conditions suivantes

$$J_0(X) = 1 \ , \ \varphi_n(J_k(X)) = J_{k-1}(X) \text{ et } J_k(0) = 0 \text{ pour } k = 1, ..., n.$$

   a) Montrer que les polynômes J_k vérifiant les conditions ci-dessus existent et sont uniques.

b) Soit $n = 3$. Calculer $J_1(X), J_2(X), J_3(X)$ et vérifier que $(J_0(X), J_1(X), J_2(X), J_3(X))$ est une base de E_3. Quelle est la matrice de φ_3 dans cette base?

Soit maintenant n quelconque, $n \geq 1$.

c) Pour $k = 1, ..., n$ déterminer le degré de $J_k(X)$.

d) Pour $k = 1, ..., n$ déterminer les racines de $J_k(X)$.

e) Déterminer la constante C_k telle que, en notant $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$ les racines de $J_k(X)$, on ait

$$J_k(X) = C_k \prod_{i=0}^{k-1} (X - \alpha_i).$$

f) Justifier que $(J_0(X), ...J_n(X))$ est une base de E_n et déterminer la matrice de φ_n dans cette base.

4. Pour $i = 0, ..., n$ on pose $e_i(X) = \varphi_{n+1}(X^{i+1})$. Prouver que $(e_0(X), ..., e_n(X))$ est une base de E_n.

5. Démontrer que quel que soit $P(X) \in E_n$ il existe $Q(X) \in E_{n+1}$, unique, tel que $Q(0) = 0$ et $\varphi_{n+1}(Q(X)) = P(X)$.

6. Soit m un entier, $m \geq 1$.

a) On considère les bases $\mathcal{E} = (e_0(X), e_1(X), e_2(X))$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ de E_2. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ (on notera M la seconde c'est-à-dire la matrice de l'identité de $(E_2, \mathcal{E})$ dans $(E_2, \mathcal{C})$). →

b) Déterminer $Q(X)$ tel que $X^2 = Q(X+1) - Q(X)$ et $Q(0) = 0$.

c) En déduire la valeur de $1^2 + ... + m^2$.

II. Polynômes de Bernoulli. Formule sommatoire d'Euler.

1. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique application F de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les conditions $F' = f$ et $\int_0^1 F(x)\,dx = 0$.

2. On définit alors une suite (g_n) d'applications polynômiales de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ en posant

$$g_0 = 1\ ,\ g_n' = g_{n-1} \text{ et } \int_0^1 g_n(x)\,dx = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

Calculer g_1, g_2, g_3, g_4.

3. Déterminer la série de Fourier de l'application G_1, de période 1, coïncidant avec g_1 sur $[0,1[$.

4. a) Démontrer que, pour $n > 1$, l'application g_n se prolonge sur $\mathbf{R}$ en une application G_n continue et de période 1.

b) Déterminer la série de Fourier de l'application G_2 puis en déduire, en justifiant les calculs, celle de G_n pour $n > 2$ (on donnera deux formules générales, l'une pour n pair, l'autre pour n impair).

c) Pour tout entier $n > 1$ on pose $b_n = G_n(0) = g_n(0)$. Montrer que b_n est nul si n est impair et que, pour n pair,

$$b_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

d) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

5. a) Soit f une application indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et m un entier, $m > 2$. En intégrant par parties, établir la formule sommatoire

$$f(1) + ... + f(m) = \int_1^m f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(m)) + \int_1^m f'(t)G_1(t)\,dt.$$

b) Plus généralement, étant donné $p \geq 1$ établir la formule

$$f(1) + ... + f(m) = \int_1^m f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(m)) + \sum_{k=1}^{p} b_{2k}(f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(1)) + R_p$$

où R_p s'exprime à l'aide d'une intégrale.

c) Utiliser cette formule pour retrouver la valeur de $1^2 + ... + m^2$ et calculer $1^3 + ... + m^3$.

III. Constante d'Euler γ.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) En utilisant la formule sommatoire établie en **II.** , démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) - \int_1^n \frac{G_1(t)}{t^2}\,dt.$$

En déduire que la suite de terme général $\gamma'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge. On notera γ sa limite.

b) En utilisant II.5.b) avec $p = 1$, écrire un développement limité de $\gamma - \gamma'_n$ par rapport aux puissances de $\frac{1}{n}$.

2. Pour tout entier $k \geq 1$ on pose

$$u_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}.$$

a) Etablir les inégalités

$$0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

puis en déduire que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ est convergente et que sa somme vérifie $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq 1$.

b) Prouver que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \gamma$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ soit $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. En utilisant ce qui précède, déterminer n tel que

$|\gamma - \gamma_n| < 10^{-2}$.

4. On se propose d'améliorer ce dernier résultat à l'aide d'une autre approximation de γ.

a) En utilisant un développement en série entière justifier, pour tout entier $k \geq 2$, les inégalités

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln(1+\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}.$$

b) En déduire, pour $k \geq 2$, les inégalités

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \leq u_k \leq \frac{1}{2k^2} \text{ puis } \frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - \gamma_n \leq \frac{1}{2n}.$$

c) Comment suffit-il alors de choisir n pour que $\gamma_n + \dfrac{1}{2(n+1)}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-2} près?

IV. Expression de γ à l'aide des dérivées de Γ.

Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge quel que soit $x > 0$.

On note $\Gamma(x)$ la valeur de cette intégrale généralisée.

2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x > 0$ soit

$$\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x,t)\,dt.$$

a) Etant donné des réels a et b vérifiant $0 < a < b < +\infty$ démontrer que (Γ_n) converge uniformément vers Γ sur l'intervalle $[a,b]$.

b) En déduire que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

c) En reprenant les notations de a), étudier la dérivabilité de Γ_n sur l'intervalle $[a,b]$.

d) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge quel que soit $x > 0$.

e) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0.+\infty[$ et donner l'expression de $\Gamma'(x)$.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

En admettant que $\gamma = I - J$ démontrer que l'on a $\Gamma'(1) = -\gamma$.

4. Pour tout entier $p \geq 1$ on pose

$$D_p = \int_0^{+\infty} f(p,t)\ln t\,dt.$$

a) Etablir, pour $p \geq 2$, une relation de récurrence entre D_p et D_{p-1}.

b) En déduire, pour $p \geq 2$, l'existence d'un entier K_p tel que

$$\Gamma'(p) = K_p\,(-\gamma + \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k-1}).$$